5.10 – 5.11

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμοί

- **Τραπέζιο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.
- **Βάσεις τραπεζίου** λέγονται οι παράλληλες πλευρές του.
- **Ύψος τραπεζίου** λέγεται η απόσταση των βάσεων.
- **Διάμεσος τραπεζίου** λέγεται το τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του.

2.

$1^η$ ιδιότητα της διαμέσου

Είναι παράλληλη προς τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.

3.

$2^η$ ιδιότητα της διαμέσου

Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ανήκει στη διάμεσο και είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων.

4.

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

5.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες
ii) Οι διαγώνιες είναι ίσες

6.

Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση να είναι ίσες
ii) Οι διαγώνιες να είναι ίσες

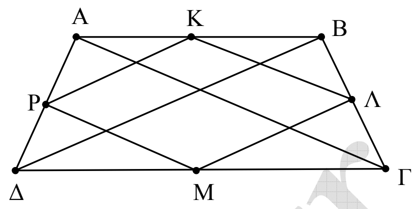
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι, ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές ρόμβου .

Προτεινόμενη λύση

Ευθύ : Έστω ότι το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι Ισοσκελές. Τότε ΑΓ = ΒΔ
Επειδή το ΡΚ ενώνει τα μέσα των ΑΔ , ΑΒ, θα είναι $\text{ΡΚ}=\dfrac{\text{ΒΔ}}{2}$



και ομοίως $\text{ΚΛ}=\dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$, άρα ΡΚ = ΚΛ .

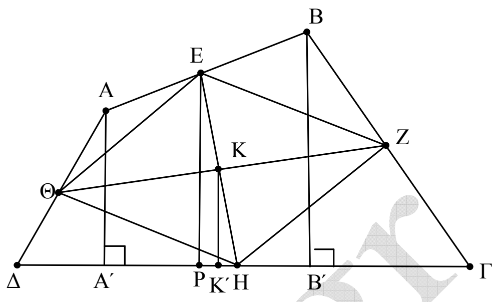
Στο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΡ έχουμε δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα αυτό είναι ρόμβος

Αντίστροφα : Έστω ότι ΚΛΜΡ είναι ρόμβος.
Τότε ΚΡ = ΚΛ
Αλλά $\text{ΚΛ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$ και $\text{ΡΚ} = \dfrac{\text{ΒΔ}}{2}$.
Άρα ΑΓ = ΒΔ
Επομένως το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές δεδομένου ότι οι διαγώνιες του είναι ίσες

2.

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρνουμε τις αποστάσεις των κορυφών Α και Β από την πλευρά ΓΔ. Αν Κ είναι το σημείο τομής των τμημάτων που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου και ΚΚ΄ η απόσταση του Κ από την ΓΔ, δείξτε ότι ΑΑ΄ + ΒΒ΄= 4ΚΚ΄

Προτεινόμενη λύση



Έστω Ε , Ζ , Η , Θ τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
Ως γνωστόν, το ΕΖΗΘ είναι παρ/μμο, οπότε οι διαγώνιες του διχοτομούνται.
Συνεπώς το Κ είναι μέσο του ΕΗ.
Φέρουμε ΕΡ ⊥ ΔΓ, οπότε ΕΡ //ΚΚ΄.

Στο τρίγωνο ΕΗΡ, το Κ είναι μέσο του ΕΗ και ΚΚ΄// ΕΡ, άρα $KK' = \frac{EP}{2}$ **(1)**

Το τετράπλευρο ΑΒΒΆ΄ είναι τραπέζιο, και επειδή Ε μέσο του ΑΒ και ΕΡ ⊥ ΔΓ δηλαδή ΕΡ // ΑΑ΄//ΒΒ΄, το ΕΡ είναι η διάμεσος του τραπεζίου.

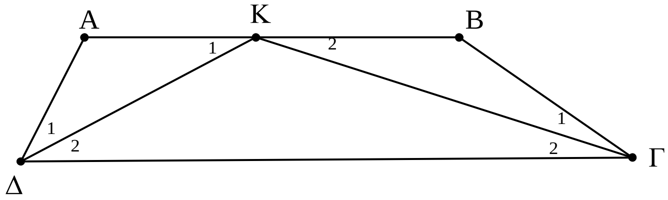
Άρα $EP = \frac{AA' + BB'}{2}$ **(2)**

Η (1) λόγω της (2) γίνεται $KK' = \frac{\frac{AA' + BB'}{2}}{2} \Leftrightarrow AA' + BB' = 4KK'$

3.

Σ' ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η βάση ΑΒ είναι ίση με το άθροισμα των μη παραλλήλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών Δ και Γ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ότι ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ και ΔΚ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

Θα αποδείξουμε ότι η ΓΚ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.

Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{K}_1$ $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}_1 = \hat{K}_1$ $\Rightarrow$ ΑΔ = ΑΚ **(1)**

Η υπόθεση γράφεται ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ

ΑΚ + ΚΒ = ΑΔ + ΒΓ και λόγω της (1)

ΚΒ = ΒΓ

Άρα $\hat{K}_2 = \hat{\Gamma}_1$, και επειδή $\hat{K}_2 = \hat{\Gamma}_2$, θα είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$,

άρα ΚΓ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$

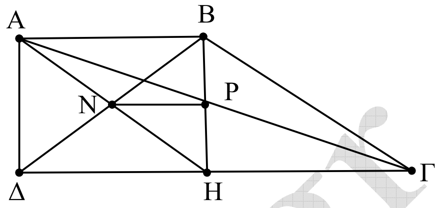
4.

Σ’ ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΔΓ, έχουμε ΔΓ=2ΑΒ και

$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$. Φέρνουμε το τμήμα ΒΗ $\perp$ ΔΓ, το οποίο τέμνει την διαγώνιο ΑΓ στο Ρ και το τμήμα ΑΗ που τέμνει την διαγώνιο ΒΔ στο Ν. Να δείξετε ότι

i) Το Ρ είναι μέσο της ΒΗ **ii)** $NP = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

Προτεινόμενη λύση



i)

$\Delta\Gamma = 2AB \Rightarrow AB = \frac{\Delta\Gamma}{2}$

ΑΒΗΔ ορθογώνιο $\Rightarrow AB = \Delta H = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.

Δηλαδή Η μέσο του ΔΓ, οπότε ΑΒ = ΗΓ
και επειδή είναι ΑΒ// ΗΓ, το ΑΒΓΗ είναι παρ/μμο.
Συνεπώς οι διαγώνιοι του διχοτομούνται δηλαδή Ρ μέσο του ΒΗ.

ii)

ΑΒΗΔ ορθογώνιο $\Rightarrow$ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται,
οπότε Ν μέσο του ΑΗ

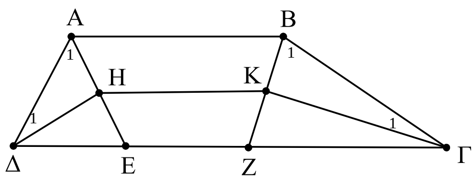
Στο τρίγωνο ΑΗΓ, το ΝΡ ενώνει τα μέσα των ΑΗ και ΑΓ,

$$\text{άρα} \quad NP = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{\frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{4}$$

5.

Σ’ ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ τέμνονται στο Η και οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Κ. Να δείξτε ότι η ΗΚ είναι παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου.

Προτεινόμενη λύση



$\hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2}$.

Όμως $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$

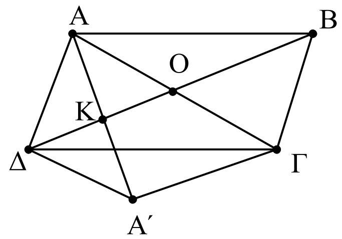
Άρα $\hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o$

Οπότε ΔΗ ύψος στο τρίγωνο ΑΔΕ.
Αφού λοιπόν το ΔΗ είναι διχοτόμος και ύψος στο τρίγωνο ΑΔΕ, το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές και το Η θα είναι το μέσο του ΑΕ . Ομοίως Κ μέσο του ΒΖ
Επομένως στο τραπέζιο ΑΕΖΒ η ΗΚ είναι διάμεσος και επομένως ΗΚ // ΑΒ // ΔΓ

6.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , και έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΔ . Να δείξετε ότι το Α′Γ Β Δ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Προτεινόμενη λύση

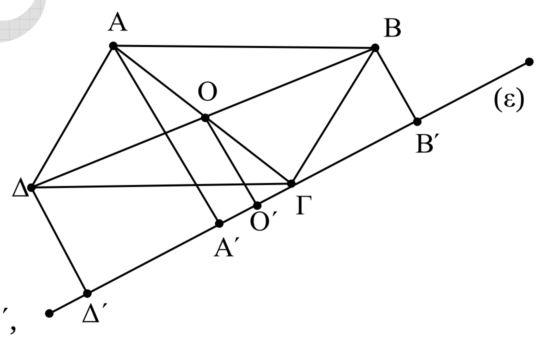


Αφού το Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη ΒΔ, το ΔΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄, άρα ΔΑ = ΔΑ΄.
Και επειδή ΔΑ = ΒΓ θα είναι και ΔΑ΄= ΒΓ
Αν Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, τότε στο τρίγωνο ΑΑ΄ Γ το ΟΚ ενώνει τα μέσα των ΑΓ και ΑΑ΄, άρα ΟΚ // Α΄Γ.
Επομένως το τετράπλευρο ΔΒΓΑ΄ είναι τραπέζιο και επειδή ΔΑ΄= ΒΓ το τραπέζιο είναι ισοσκελές

7.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και μία ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή Γ και έχει προς το ίδιο μέρος της τις κορυφές Α , Β , Δ . Να δείξετε ότι η απόσταση της κορυφής Α από την (ε) είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών Β και Δ από την (ε) .

Προτεινόμενη λύση



Έστω ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΔΔ΄ οι αποστάσεις των κορυφών Α , Β , Δ από την (ε)
Αν Ο το κέντρο του παρ/μμου και ΟΟ΄ η απόσταση του Ο από την (ε), τότε ΔΔ΄// ΑΑ΄ // ΟΟ΄ // ΒΒ΄.
Επειδή Ο μέσο του ΒΔ και ΟΟ΄// ΔΔ΄//ΒΒ΄, το ΟΟ΄ είναι διάμεσος στο τραπέζιο ΔΔ΄Β΄Β,

άρα $ΟΟ' = \dfrac{ΔΔ' + ΒΒ'}{2}$ **(1)**

Στο τρίγωνο ΑΑ΄Γ, το Ο είναι μέσο του ΑΓ και ΟΟ΄// ΑΑ΄,

άρα $ΟΟ' = \dfrac{ΑΑ'}{2}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε ΑΑ΄= ΔΔ΄+ ΒΒ΄

8.

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε την $BE \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι

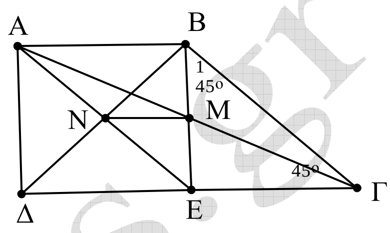
i) Οι ΒΕ και ΑΓ διχοτομούνται

ii) $AE \perp B\Delta$

iii) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να δείξτε ότι

$$MN = // \frac{\Delta\Gamma}{4}$$

Προτεινόμενη λύση



i)

$\Delta\Gamma = 2AB \Rightarrow AB = \frac{\Delta\Gamma}{2}$

και επειδή το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο,

θα έχουμε $AB = \Delta E$,

οπότε $\Delta E = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, δηλαδή Ε μέσο του ΔΓ οπότε ΑΒ = ΕΓ.

Αλλά ΑΒ// ΕΓ, άρα το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, συνεπώς οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΕ διχοτομούνται.

ii)

Επειδή $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + 3\hat{\Gamma} = 180^o$, θα είναι $\hat{\Gamma} = 45^o$.

Άρα, λόγω του ορθογωνίου ΑΒΕΔ, θα είναι $\hat{B}_1 = 45^o$.

Επομένως ΒΕ = ΕΓ = ΑΒ, οπότε το ορθογώνιο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο και επομένως οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $AE \perp B\Delta$

iii)

Προφανώς το Μ είναι το μέσο της ΑΓ και το Ν το μέσο της ΑΕ

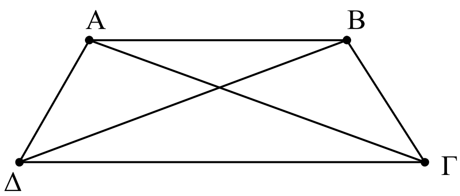
Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το ΝΜ ενώνει τα μέσα των ΑΕ και ΑΓ,

άρα $NM = // \frac{E\Gamma}{2} = // \frac{\frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = // \frac{\Delta\Gamma}{4}$

9.

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνεται ότι ΒΓ = ΑΔ και ΒΔ = ΑΓ. Επίσης οι γωνίες του δεν είναι όλες ίσες, Δείξτε ότι το τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Προτεινόμενη λύση



Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ είναι ίσα διότι ΑΔ = ΒΓ , ΑΓ = ΒΔ και ΔΓ κοινή.

Άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

Ομοίως από τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΓΑΒ προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{B}$.

Όμως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 360^o$ **(1)**

Οπότε $2\hat{A} + 2\hat{\Delta} = 360^o \Rightarrow \hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o \Rightarrow$ ΑΒ // ΔΓ **(2)**

Η (1) επίσης δίνει $2\hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 360^o \Rightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$.

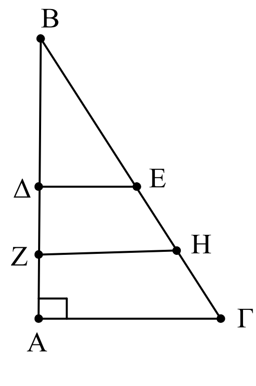
Και επειδή οι γωνίες του τετράπλευρου δεν είναι ίσες, θα έχουμε $\hat{A} \neq \hat{\Gamma}$, οπότε αποκλείεται το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο, επομένως λόγω της (2) αυτό είναι τραπέζιο.

Και επειδή $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

10.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και Δ , Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν $ZH = \frac{3}{8}B\Gamma$, δείξτε ότι $\hat{B} = 30^o$.

Προτεινόμενη λύση



Αφού το ΔΕ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ, θα είναι $\Delta E \mathbin{/\!/=} \frac{A\Gamma}{2}$ **(1)**

οπότε το ΔΕΓΑ είναι τραπέζιο.

Επειδή Ζ μέσο του ΔΑ και ΖΗ // ΑΓ, το ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου,

άρα $ZH = \frac{\Delta E + A\Gamma}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\frac{A\Gamma}{2} + A\Gamma}{2} = \frac{3A\Gamma}{4}$

Από την υπόθεση όμως είναι και $ZH = \frac{3B\Gamma}{8}$,

οπότε $\frac{3A\Gamma}{4} = \frac{3A\Gamma}{8} \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$

Συνεπώς στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι $\hat{B} = 30^o$